18/10/2016

Μάθημα 5ο
Πιθανότητες:

Αξιωματικό Ορισμό Πιθανότητας Kolmogorov - 1933.

Στοιχεία Αξιωματικός Ορισμός
① Ένα μη κενό σύνολο S, $S \neq \emptyset$.
② Έστω μια οικογένεια υποσυνόλων του S, η $\mathcal{A}$, τέτοια ώστε:
(i) Το $S \in \mathcal{A}$
(iii) Αν $A_1, A_2, \ldots$ μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$
τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.
(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A^c \in \mathcal{A}$.

→ σ- άλγεβρα ή σ - πεδίο.

Ορισμός
Έστω $S \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}$ η σ-άλγεβρα υποσυνόλων του S.
Θεωρούμε τη συνολο-συνάρτηση $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$.
Η P λέγεται μετροπιθανότητας ή πιθανότητα αν ικανοποιεί:
(A1) $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$
(A2) $P(S) = 1$.
(A3) Αν $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, τότε
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Η τριάδα $(S, \mathcal{A}, P)$ λέγεται χώρος πιθανότητας ή χώρος πιθανοτήτων (χ.π.)

→ Αξιώματα Kolmogorov

Παράδειγμα , και S πεπερασμένο.
Έστω $S \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}$ η σ-άλγεβρα υποσυνόλων του S.
Τότε η συνολοσυνάρτηση $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ με τύπο $P(A) = \frac{\|A\|}{\|S\|}$
είναι μέτρο πιθανότητας, ικανοποιεί δηλ. τα αξιώματα
Kolmogorov.

Τα A1), A2) προφανώς ικανοποιούνται. Αρκεί να δείξουμε το A3)
Έστω $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ με $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$
Αφού το S είναι πεπερασμένο έχει πεπερασμένο πλήθος
υποσύνολα. (Αν S έχει n στοιχεία τότε υπάρχουν 2^n υποσύνο-
λα του S)
Κάποια από τα $A_i = \emptyset$
Έστω $A_1, \ldots, A_k \neq \emptyset$ και $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots = \emptyset$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{\left\|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\|}{\|S\|} \underset{i \neq j}{\overset{A_i \cap A_j = \emptyset}{=}} \frac{\|A_1\| + \|A_2\| + \ldots + \|A_k\| + \|A_{k+1}\| + \ldots}{\|S\|}$$

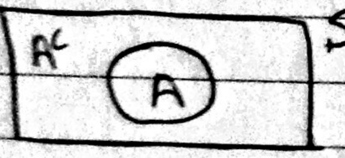
$$= \frac{\|A_1\|}{\|S\|} + \frac{\|A_2\|}{\|S\|} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Ιδιότητες των Πιθανοτήτων
Πρόταση. Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χ.π. Τότε:
① $P(\emptyset) = 0$
② Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $\begin{cases} ⓐ \ P(A^c) = 1 - P(A) \\ ⓑ \ 0 \leq P(A) \leq 1 \end{cases}$
③ Αν $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B$ τότε $\begin{cases} ⓐ \ P(A) \leq P(B) \\ ⓑ \ P(B - A) = P(B) - P(A) \end{cases}$
④ Αν $A, B \in \mathcal{A}$ τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
⑤ⓐ Αν $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$ μια αύξουσα ακολουθία ($A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n$)
στοιχείων του $\mathcal{A}$ τότε: $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

β) Αν $A_k \in \mathcal{A}$, $k=1,2,\dots$ μια φθίνουσα ακολουθία ($A_{k+1} \subseteq A_k$, $\forall k$) στοιχείων της $\mathcal{A}$, τότε: $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

<u>Απόδειξη</u>

① α)



$$P(S) = P(A \cup A^c)$$

$$\left.\begin{aligned} S &= A \cup A^c \\ A \cap A^c &= \emptyset \end{aligned}\right\}$$

$$\Big\Downarrow \; (A3) \; (A2)$$

$$1 = P(A) + P(A^c)$$

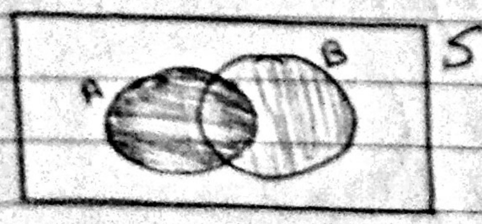
$$\Downarrow$$

$$* \; \boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$$

β) Από A1), $P(A^c) \geq 0 \Rightarrow 1 - P(A) \geq 0 \Rightarrow P(A) \leq 1$
και (A1): $P(A) \geq 0$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$$

④



$$A \cup B = A \cup (B - A \cap B)$$

$$A \cap (B - A \cap B) = \emptyset$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P[A \cup (B - A \cap B)] \overset{(A3)}{=} \\ &= P(A) + P(B - A \cap B) \overset{A \cap B \subseteq B}{\underset{(3\beta)}{=}} \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις στην 4η ιδιότητα

① Υπάρχει γενικός τύπος για την $P(\bigcup_i A_i)$ όταν τα A_i δεν είναι κατ' ανάγκη ξένα (ασυμβίβαστα) ανά δύο.

Για 3 ενδεχόμενα:

$$P(A\cup B\cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A\cap B) - P(A\cap \Gamma) - P(B\cap \Gamma) + P(A\cap B\cap \Gamma)$$

② Ανισότητα Boole:

Αν $A_i \in \mathcal{A}$, $i=1,2,\dots$ τότε $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Παράδειγμα

Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ ένας χ.π. και $A,B \in \mathcal{A}$ με $P(A)=0{,}4$ και $P(B)=0{,}7$.

ⓐ Είναι τα A,B ασυμβίβαστα;

ⓑ ΝΔΟ $0{,}1 \leq P(A\cap B) \leq 0{,}4$.

Απόδειξη

ⓐ Έστω τα A,B ασυμβίβαστα ($A\cap B=\emptyset$)

Τότε από (4) ιδιότητα:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) + \cancelto{0}{P(A\cap B)}$$
$$= 0{,}4 + 0{,}7$$
$$= 1{,}1$$ άτοπο λόγω της 2β ιδιότητας.

ⓑ Ισχύει $A\cap B \subseteq A$

$$\xRightarrow{(3\alpha)} P(A\cap B) \leq P(A) = 0{,}4 \Rightarrow P(A\cap B) \leq 0{,}4.$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) \\ 0 \leq P(A\cup B) \leq 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$$
$$\geq P(A) + P(B) - 1$$
$$= 0{,}4 + 0{,}7 - 1$$
$$= 0{,}1$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B) \geq 0{,}1.$$

Παράδειγμα

Έστω $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$

Ν.δ.ο. $\max\left\{ 0 \;,\; \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n+1 \right\} \leq P(A_1\cap A_2\cap \ldots \cap A_n)$

$$\leq \min\{P(A_1), \ldots, P(A_n)\}$$

Απόδειξη.

$A_1\cap A_2\cap \ldots \cap A_n \subseteq A_i \;,\; \forall i=1,\ldots,n$

$\xRightarrow{3a} P(A_1\cap \ldots \cap A_n) \leq P(A_i) \;,\; \forall i=1,\ldots,n$

$\Rightarrow P(A_1\cap \ldots \cap A_n) \leq \min\{P(A_1), \ldots, P(A_n)\}$

$P(A_1\cap \ldots \cap A_n) \geq 0$ λόγω A1. (*)

$$P(A_1\cap \ldots \cap A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \stackrel{2a}{=} 1 - P\left[\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right] \stackrel{\text{De Morgan}}{=}$$

$$= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ανισότητα} \\ \text{Boole}}}{\geq} \quad 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c) =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{n} [1 - P(A_i)]$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

$$= 1 - n + \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad (**)$$

Από (*), (**) : $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1 \leq P(A_1 \cap \ldots \cap A_n).$